B Berechnung der allgemeinen Rotationsmatrix

Im folgenden soll die in der vorliegenden Studienarbeit angegebene allgemeine Rotationsmatrix ausführlich hergeleitet werden.

Dafür müssen die Rotationsmatrizen

$$R_1 = R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_2 = R_z = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$R_3 = R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gemäß der Gleichung

$$R_M = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 = (R_2 \cdot R_1)^{-1} \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1$$

miteinander multipliziert werden. Zur Vereinfachung wurde auf die Darstellung der homogenen Komponenten verzichtet.

Die inversen Matrizen ergeben sich zu:

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inversen der Matrix R_1 bzw. R_2 entsprechen ihren Transponierten. Eine derartige Matrix wird als orthogonale Matrix bezeichnet [6]. Da für diese Klasse von Matrizen gilt, daß das

Produkt zweier orthogonaler Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ergibt, vereinfacht sich auch die Berechnung von $(R_2 \cdot R_1)^{-1}$ entsprechend:

$$R_2 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\beta & \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\alpha \cdot \sin\beta & \cos\beta & \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

bzw.

$$(R_2 \cdot R_1)^{-1} = (R_2 \cdot R_1)^{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta & \sin\alpha \cdot \sin\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Um die allgemeine Rotationsmatrix R_M herleiten zu können, werden die bereits im Kapitel zur Rotation berechneten Werte für die homogenen Matrizen R_1, R_2 und R_3 genutzt.

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 & \frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 & \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{xz} & y & 0 & 0 \\ -y & \lambda_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zuerst soll wieder der Ausdruck ($R_2 \cdot R_1$) bestimmt werden:

$$R_2 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} & \lambda_{xz} & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} & 0 \\ -\frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 & \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird jetzt mit R_3 multipliziert. Auf die Anordnung der Matrizen ist zu achten, da ein Vertauschen zu falschen Ergebnissen führt:

$$R_3 \cdot (R_2 \cdot R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} & \lambda_{xz} & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} & 0 \\ -\frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 & \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi + \frac{z}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi & \lambda_{xz} \cdot \cos\varphi & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi - \frac{x}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi - \frac{z}{\lambda_{xz}} \cdot \cos n\varphi & \lambda_{xz} \cdot \sin\varphi & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi + \frac{x}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für den nächsten Schritt wird noch die Matrix $(R_2 \cdot R_1)^{-1}$ benötigt

$$(R_2 \cdot R_1)^{-1} = \begin{pmatrix} x & -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} & -\frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 \\ y & \lambda_{xz} & 0 & 0 \\ z & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} & \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Platzgründen muß die Multiplikation dieser Matrix mit der inversen Matrix von ($R_2 \cdot R_1$) komponentenweise durchgeführt werden:

$$R_M = (R_2 \cdot R_1)^{-1} \cdot R_3 \cdot (R_2 \cdot R_1) = \begin{pmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) \\ (5) & (6) & (7) & (8) \\ (9) & (10) & (11) & (12) \\ (13) & (14) & (15) & (16) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} & -\frac{z}{\lambda_{xz}} & 0 \\ y & \lambda_{xz} & 0 & 0 \\ z & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} & \frac{x}{\lambda_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi + \frac{z}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi & \lambda_{xz} \cdot \cos\varphi & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi - \frac{x}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi & 0 \\ -\frac{x \cdot y}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi - \frac{z}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi & \lambda_{xz} \cdot \sin\varphi & -\frac{y \cdot z}{\lambda_{xz}} \cdot \sin\varphi + \frac{x}{\lambda_{xz}} \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Matrixelemente ergeben sich dabei wie folgt:

$$(1) \qquad = x^2 + \frac{x^2 \cdot y^2}{\lambda_{xz}^2} \cdot \cos\varphi - \frac{x \cdot y \cdot z}{\lambda_{xz}^2} \cdot \sin\varphi + \frac{x \cdot y \cdot z}{\lambda_{xz}^2} \cdot \sin\varphi + \frac{z^2}{\lambda_{xz}^2} \cdot \cos\varphi$$

$$= x^2 + \cos\varphi \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^2}{\lambda_{xz}^2} + \frac{z^2}{\lambda_{xz}^2} \right)$$

$$= x^2 + \cos\varphi \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^2 + z^2}{x^2 + z^2} \right)$$

$$= x^2 + \cos\varphi \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^2 + 1 - x^2 - y^2}{1 - y^2} \right)$$

$$= x^2 + \cos\varphi \cdot \left(\frac{1 - y^2}{1 - y^2} + \frac{-x^2 + x^2 \cdot y^2}{1 - y^2} \right)$$

$$= x^2 + \cos\varphi \cdot \left(1 - x^2\right)$$

$$= x^2 \cdot \left(1 - \cos\varphi\right) + \cos\varphi .$$

Die Vereinfachung des oben stehenden Ausdrucks wurde möglich, weil der normierte Richtungsvektor der Drehachse die Länge

$$\lambda_{xy} = \sqrt{{\lambda_{xz}}^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

besitzt. Für die zweite Komponente sieht man sofort das endgültige Ergebnis

$$(2) \qquad = x \cdot y \cdot (1 - \cos\varphi) - z \cdot \sin\varphi \,,$$

während für die dritte Komponente wieder eine etwas ausführlichere Umformung angebracht ist:

$$(3) \qquad = x \cdot z + \frac{x \cdot y^2 \cdot z}{{\lambda_{xz}}^2} \cdot \cos\varphi + \frac{x^2 \cdot y}{{\lambda_{xz}}^2} \cdot \sin\varphi + \frac{y \cdot z^2}{{\lambda_{xz}}^2} \cdot \sin\varphi - \frac{x \cdot z}{{\lambda_{xz}}^2} \cdot \cos\varphi$$

$$= x \cdot z + \cos\varphi \cdot \left(\frac{x \cdot y^2 \cdot z}{{\lambda_{xz}}^2} - \frac{x \cdot z}{{\lambda_{xz}}^2} \right) + \sin\varphi \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y}{{\lambda_{xz}}^2} + \frac{y \cdot z^2}{{\lambda_{xz}}^2} \right)$$

$$= x \cdot z + \cos\varphi \cdot \left(\frac{-x \cdot z \cdot (1 - y^2)}{1 - y^2} \right) + \sin\varphi \cdot \left(\frac{y \cdot (1 - y^2)}{1 - y^2} \right)$$

$$= x \cdot z \cdot (1 - \cos\varphi) + y \cdot \sin\varphi \,.$$

Da sich die anderen Matrixelemente entsprechend herleiten lassen, soll jetzt nur noch das endgültige Ergebnis genannt werden:

$$R_M = \begin{pmatrix} x^2 \cdot (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi & xy \cdot (1 - \cos\varphi) - z \cdot \sin\varphi & xz \cdot (1 - \cos\varphi) + y \cdot \sin\varphi & 0 \\ xy \cdot (1 - \cos\varphi) + z \cdot \sin\varphi & y^2 \cdot (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi & yz \cdot (1 - \cos\varphi) - x \cdot \sin\varphi & 0 \\ xz \cdot (1 - \cos\varphi) - y \cdot \sin\varphi & yz \cdot (1 - \cos\varphi) + x \cdot \sin\varphi & z^2 \cdot (1 - \cos\varphi) + \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$